Title	ソボレフ不等式の最良定数 : 連続から離散へ (再生核の応用についての研究)
Author(s)	永井, 敦; 亀高, 惟倫; 山岸, 弘幸; 武村, 一雄; 渡辺, 宏太郎
Citation	数理解析研究所講究録 (2008), 1618: 89-94
Issue Date	2008-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/140191
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1618巻 2008年 89-94

ソボレフ不等式の最良定数 – 連続から離散へ

The best constant of Sobolev inequality – From continuous to discrete

[1]永井　敦, [2]亀高惟倫, [3]山岸弘幸, [4]武村一雄, [5]渡辺宏太郎
[1],[4]日本大学, [3]大阪大学, [5]防衛大学校

[1]Atsushi Nagai, [2]Yoshinori Kametaka, [3]Hiroyuki Yamagishi,
[4]Kazuo Takemura, [5]Kohtaro Watanabe
[1],[4]Nihon University, [3]Osaka University, [5]National Defense Academy
キーワード：離散ソボレフ不等式, 離散ベルヌーイ多項式,
再生核，ペンローズムーア一般化逆行列

1　はじめに

近年，ソボレフ不等式

$$||u||_{L^q(\Omega)} \le C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W^{M,p}(\Omega), \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

の特別な場合

$$q = \infty, p = 2, N = 1, \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$$

言い換えると，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{a<x<b} |u(x)|\right)^2 \le C \int_a^b |u^{(M)}(x)|^2 dx$$

について，最良定数および最良関数を求める手法を開発した (図1参照)．最良定数 C_0 および最良関数 $u = u_0(x)$ は与えられた境界値問題のグリーン関数 $G(x, y)$ の対角線値を調べることで次のように求まる．

$$C_0 = \sup_y G(y, y) = G(y_0, y_0), \quad u_0(x) = G(x, y_0)$$

本論文では，図1で差分方程式の境界値問題から出発することによって，これまで扱われることのなかった離散型ソボレフ不等式を導出して，その最良定数および最良関数を具体的に求める．

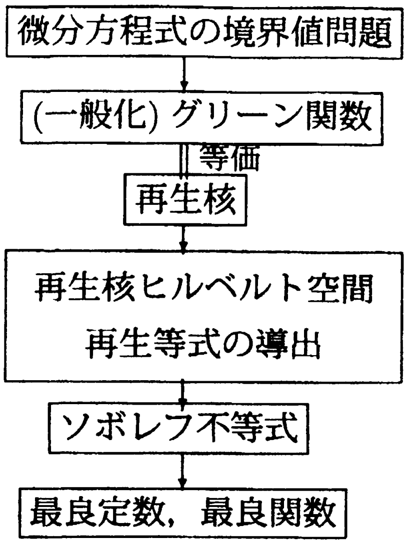

図 1: 最良定数，関数を求める手続き

2 主定理

$\boldsymbol{C}_0^N$ を

$$\boldsymbol{C}_0^N = \left\{ \boldsymbol{u} = {}^t(u(0), u(1), \cdots, u(N-1)) \in \boldsymbol{C}^N \,\middle|\, \sum_{j=0}^{N-1} u(j) = 0 \right\}$$

で定義すると, これは $M = 1, 2, 3, \cdots$ を固定するごとに

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_M = (\boldsymbol{A}^M \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{L} - \boldsymbol{I})^M \boldsymbol{u}, (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{I})^M \boldsymbol{v})$$

を内積としてヒルベルト空間である. ここで $\boldsymbol{A}$ は次式で定義される $2M$ 階階差行列である.

$$\boldsymbol{A} = ({}^t\boldsymbol{L} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L} = \Big(\delta(i + 1 - j) \Big),$$

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & \mathrm{Mod}(i, N) = 0 \\ 0 & \mathrm{Mod}(i, N) \neq 0 \end{cases}$$

ソボレフ汎関数 $S_M(\boldsymbol{u})$ を以下で定義する.

$$S_M(\boldsymbol{u}) = \frac{\left(\max_{0\le k\le N-1}|u(k)|\right)^2}{||\boldsymbol{u}||_M^2}, \quad ||u||_M^2 = (u,u)_M. \tag{1}$$

ソボレフ汎関数の inf について以下の定理が成立する.

定理 1 任意の $\boldsymbol{u}\in \mathbf{C}_0^N$ に対して, $\boldsymbol{u}$ に依らない定数 $B>0$ が存在して以下の不等式が成立する.

$$B\,\|\boldsymbol{u}\|_M^2 \le \left(\max_{0\le k\le N-1}|u(k)|\right)^2 \Leftrightarrow B\le S_M(\boldsymbol{u})$$

このような B のうち最良のもの B_M は以下で与えられる.

$$B_M = \inf_{\boldsymbol{u}\in C_0^N} S_M(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} N^{-1}4^{-M} & (N=2n+2) \\ N^{-1}\left(4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right)^{-M} & (N=2n+1) \end{cases}$$

また最良関数は以下の通り.

$$u(j) = \begin{cases} u_0(-1)^j & (N=2n+2) \\ u_0\omega^{nj},\ u_0\omega^{(n+1)j} & (N=2n+1) \end{cases}$$

ただし, $\omega=\exp(2\pi/(2n+1)),\ u_0\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

注意 1 上の定理は離散特有の現象である. 連続極限を取ると,

$$\left(\max_{0\le k\le N-1}|u(k)|\right)^2 \ge 0$$

という自明な式しか得られない.

次にソボレフ不等式の離散版に対応する以下の定理が成立する.

定理 2 任意の $\boldsymbol{u}\in \mathbf{C}_0^N$ に対して, $\boldsymbol{u}$ に依らない定数 $C>0$ が存在して以下の不等式(離散ソボレフ不等式)が成立する.

$$\left(\max_{0\le k\le N-1}|u(k)|\right)^2 \le C\,\|\boldsymbol{u}\|_M^2 \Leftrightarrow S_M(\boldsymbol{u})\le C$$

このような C のうち最良定数 C_M は以下で与えられる.

$$C_M = \sup_{\boldsymbol{u}\in C_0^N} S_M(\boldsymbol{u}) = g_M(0) = N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}\left|\omega^k-1\right|^{-2M}$$

また最良関数は k $(0 \le k \le N-1)$ を任意に固定したとき

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}^M \boldsymbol{\delta}_k, \ \ \boldsymbol{\delta}_k = \Big(\cdots, \delta(i-k), \cdots\Big)$$

で与えられ, $\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{A}$ のペンローズムーア一般化逆行列である.

$M = 1,2,3,4,5$ に対して最良定数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(N-1)(N+1)}{12N} \\
C_2 &= \frac{(N-1)(N+1)(N^2+11)}{720N} \\
C_3 &= \frac{(N-1)(N+1)(2N^4+23N^2+191)}{60480N} \\
C_4 &= \frac{(N-1)(N+1)(N^2+1)(3N^4+10N^2+227)}{3628800N} \\
C_5 &= \frac{(N-1)(N+1)(2N^8+35N^6+321N^4+2125N^2+14797)}{95800320N}
\end{aligned}$$

注意 2 $\boldsymbol{A}$ のペンローズムーア逆行列 $\boldsymbol{G}$ は以下の関係式から一意的に決定される.

$$\begin{cases} \boldsymbol{AG} = \boldsymbol{GA} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{GE}_0 = \boldsymbol{O} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{N}\boldsymbol{w}_0{}^t\boldsymbol{w}_0, \quad \boldsymbol{w}_0 = {}^t(1, \cdots 1)$$

また $\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{A}$ の一般化逆行列であることから, $\boldsymbol{G}^M$ はヒルベルト空間 $(\mathbb{C}_0^N, (\cdot,\cdot)_M)$ の再生核であることがわかる. つまり再生等式

$$(\boldsymbol{u}, G^M \boldsymbol{\delta}_k) = u(k) \quad (0 \le k \le N-1)$$

が任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}_0^N$ について成立する.

また定理 2 において重要な役割を果たす $\boldsymbol{G}^M$ は

$$\boldsymbol{G}^M = \Big(\ g_M(i-j)\ \Big), \quad g_M(i) = (-1)^{M-1}\sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k} b_{k+M}(i)$$

で与えられる. $b_n(i)$ は, 漸化式

$$\begin{cases} b_0(i) = N^{-1} - \delta(i), \\ b_n(i+1) - b_n(i) = b_{n-1}(i), \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} b_n(i) = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

で定まる $\mathrm{Mod}(i-1,N)$ の多項式であり，これを離散ベルヌーイ多項式と呼ぶ．離散ベルヌーイ多項式の具体形を以下に記す．

$$
\begin{aligned}
b_0(i) &= \frac{1}{N} - \delta(i) \\
b_1(i) &= \frac{1}{2} \bmod (i-1,N) - \frac{N-1}{2N} \\
b_2(i) &= \frac{1}{2N} \bmod (i-1,N)^2 - \frac{1}{2} \bmod (i-1,N) + \frac{N^2-1}{12N}
\end{aligned}
$$

$i/N = x$ を固定して，以下の連続極限でベルヌーイ多項式に収束する．

$$
\lim_{N\to\infty} N^{-k+1} b_k(i) = b_k(x)
$$

また最良定数 $C_m(m=1,2,\cdots)$ について以下の定理が成り立つ．

定理 3 最良定数の列 $\{C_m\}_{m=1,2,\cdots}$ は以下の漸化式を満たす．

$$
\sum_{k=1}^{n+2-\varepsilon} h_k(N) C_{k+l} = 0 \quad (N = 2n+\varepsilon, \varepsilon = 0,1)
$$

ここで $h_k(N)$ は次式で与えられる．

$$
z(4z-1)^{1-\varepsilon} \prod_{k=1}^{n} (z - |\omega^k - 1|^{-2}) = \sum_{k=1}^{n+2-\varepsilon} h_k(N) z^k
$$

参考文献

[1] Y. Kametaka, K. Watanabe and A. Nagai, *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space*, Proc. J. Acad., **81**, Ser. A (2005) pp. 57–60.

[2] K. Watanabe, T. Yamada and W. Takahashi, *Reproducing Kernels of $H^m(a,b)$ $(m=1,2,3)$ and Least Constants in Sobolev's Inequalities*, Applicable Analysis **82** (2003) pp. 809–820.

[3] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai and K. Takemura, *Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant of Sobolev inequality*, Scientiae Mathematicae Japonicae, e-2007 (2007) pp. 63–89.

[4] A. Nagai, Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Takemura and K. Watanabe, *Discrete Bernoulli polynomials and the best constant of discrete Sobolev inequality*, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008) pp. 307–327.

[5] G. Talenti, *Best constant of Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura. Appl., **110** (1976) pp. 353–372.

[6] 斉藤三郎，再生核の理論，牧野書店，2002.

[7] 小松勇作，特殊関数，朝倉書店，2004.